Übungsklausur Exponentialfunktion (Kaninchen)
Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Leite $f(x)=(3x-1)\cdot e^{x^2-1}$ einmal ab. (2VP)

2) Berechne das Integral $\int_1^{e^2} \frac{4}{x}\,dx$. (2VP)

3) Löse die Gleichung.

a) $\left(x^2-2\right)\cdot\left(e^x+1\right)=0$ b) $e^x+1-\frac{2}{e^x}=0$ (4VP)

4)
a) Bestimme den Extrempunkt der Funktion $f(x)=x\cdot e^{-x}$.
b) Verändere den Funktionsterm von f(x) so ab,
(1) dass das Schaubild der Funktion g(x) durch Spiegelung an der x-Achse aus dem Schaubild von f(x) hervorgeht.
(2) dass das Schaubild der Funktion g(x) durch Spiegelung an der y-Achse aus dem Schaubild von f(x) hervorgeht. (4VP)

5) Gegeben sind die Schaubilder von zwei Funktionen f und g.
Die Schaubilder werden beschrieben durch die Funktion
$f(x)=(x-a)^2+b$ bzw. $g(x)=-2+c\cdot e^{-0,5x}$.
a) Ordne den Funktionen f und g das jeweils passende Schaubild zu.
Begründe deine Zuordnung.
b) Bestimme die Werte für a, b und c. (3VP)

Schaubild 1

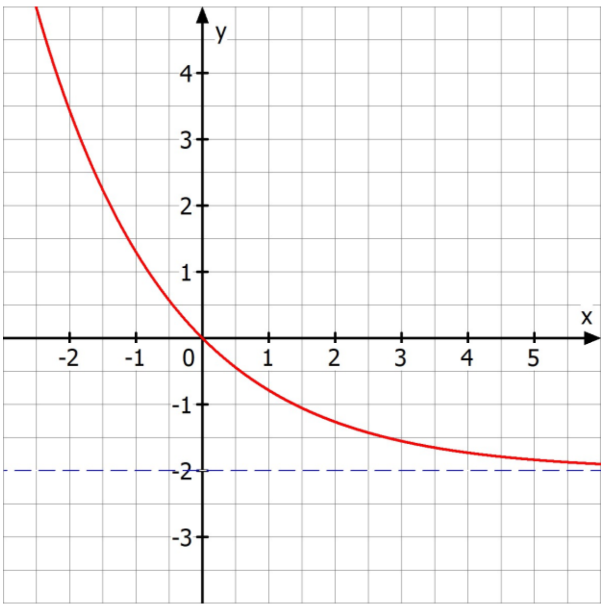
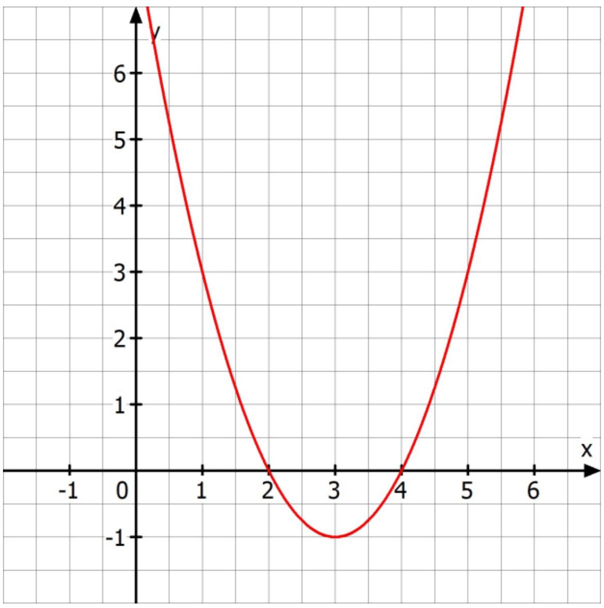
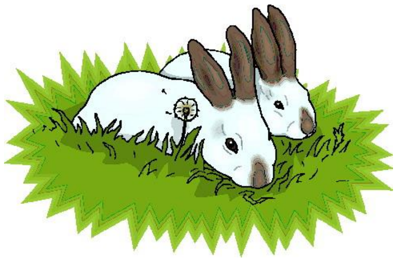


Schaubild 2



Übungsklausur Exponentialfunktion (Kaninchen)
Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)



Aufgabe 1

a) Im Jahre 1800 wurden Kaninchen auf einer kleinen Insel bei Australien ausgesetzt. Die Anzahl der Kaninchen konnte in den folgenden Jahren zunächst näherungsweise durch einen Funktionsterm der Form

$$f(t) = 60 \cdot e^{0{,}1 \cdot t} \qquad \text{(t in Jahren nach 1800)}$$

beschrieben werden.

(1) Wie viele Kaninchen wurden 1800 ausgesetzt?
(2) Wie viele Kaninchen gab es nach 10 Jahren?
(3) Wann hat sich die Anzahl der Kaninchen verdoppelt?
(4) Wie müsste k in $\tilde{f}(t) = 60 \cdot e^{k \cdot t}$ angepasst werden, um eine andere Kaninchenpopulation zu beschreiben, deren Bestand nach 10 Jahren auf 240 Tiere angewachsen ist? (6VP)

b) Nach 20 Jahren konnte das Wachstumsverhalten der Kaninchen nicht mehr gut durch f(t) beschrieben werden. Ab diesem Zeitpunkt ist aber die Funktion

$$g(t) = 1200 - c \cdot e^{-0{,}1 \cdot t + 2} \qquad \text{(t in Jahren nach 1800)}$$

eine gute Näherung für die Anzahl der Kaninchen.

(1) Mit wie viel Kaninchen ist langfristig auf der Insel zu rechnen?
(2) Nenne einen Grund für dieses veränderte Wachstumsverhalten.
(3) Zeige, dass die Anzahl der Kaninchen immer wächst, falls c > 0 ist.
(4) Wie groß muss c sein, damit nach 20 Jahren f(t) und g(t) die gleiche Anzahl Kaninchen liefert? (6VP)

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktionenschar $f_c(x) = e^{cx+1}$.

a) Für welchen Wert von c verläuft der Graph von f_c durch $A(2|3)$?
b) Für welchen Wert von c hat der Graph von f_c an der Stelle 0 die Steigung 2? (3VP)

Übungsklausur Exponentialfunktion (Kaninchen)

Lösungen Pflichtteil:

1) $f'(x) = 3 \cdot e^{x^2-1} + (3x-1) \cdot e^{x^2-1} \cdot 2x$ **2P**

2) $\int_1^{e^2} \frac{4}{x} dx = [4\ln(x)]_1^{e^2} = 4\ln(e^2) - 4\underbrace{\ln(1)}_{=0} = 4 \cdot 2\underbrace{\ln(e)}_{=1} = 8$ **2P**

3) a) $x^2 - 2 = 0$ oder $e^x + 1 = 0$

$\boxed{x_{1/2} = \pm\sqrt{2}}$ keine Lösung (2P)

b) $e^x + 1 - \frac{2}{e^x} = 0 \quad |\cdot e^x$

$e^{2x} + e^x - 2 = 0$

Subst.: $u = e^x$

$u^2 + u - 2 = 0$

$u_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$u_1 = 1$ oder $u_2 = -2$

$e^x = 1$ oder $e^x = -2$

$\boxed{x = 0}$ keine Lösung (2P) **4P**

4) a) $f'(x) = e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \cdot (1-x)$ (0,5P)

$f''(x) = e^{-x}(-1) \cdot (1-x) + e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}(-2+x)$ (0,5P)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} \cdot (1-x) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$f''(1) = e^{-1}(-2+1) = -\frac{1}{e} < 0 \Rightarrow H(1 \mid f(1))$

$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \Rightarrow \boxed{H\left(1 \middle| \frac{1}{e}\right)}$ (1P)

b) (1) $g(x) = -x \cdot e^{-x}$ (1P) (2) $g(x) = -x \cdot e^{x}$ (1P) **4P**

5) a) Schaubild 1 gehört zu g(x), da das Schaubild eine Exponentialfunktion zeigt.
Schaubild 2 gehört zu f(x), da das Schaubild eine Parabel zeigt. (1P)

b) Tiefpunkt von f(x) liegt bei $T(3 \mid -1) \Rightarrow f(x) = (x-3)^2 - 1 \Rightarrow \boxed{a = 3}, \boxed{b = -1}$ (1P)

Punkt $O(0 \mid 0)$ liegt auf Schaubild 1: $g(0) = 0 = -2 + c \cdot \underbrace{e^{-0,5 \cdot 0}}_{=1} \Leftrightarrow \boxed{c = 2}$ (1P) **3P**

Summe: 15 Punkte

Übungsklausur Exponentialfunktion (Kaninchen)

Lösungen Wahlteil:

Aufgabe 1

a) (1) f(0) = 60 Kaninchen (1P)

(2) $f(10) = 163{,}09 \Rightarrow 163\text{ Kaninchen}$ (1,5P)

(3) $f(t) = 120 \Rightarrow t = 6{,}93$ nach 6.93 Jahren (1,5P)

(4) $\tilde{f}(10) = 60e^{k\cdot 10} = 240 \Rightarrow e^{10k} = 4 \Rightarrow 10k = \ln(4) \Rightarrow k = \frac{\ln(4)}{10} \approx 0{,}139$ (2P) **6P**

b) (1) Für $t \to \infty$ gilt $g(t) = 1200 - c \cdot \underbrace{e^{-0{,}1t+2}}_{\to 0} \to 1200 \Rightarrow$ Mit 1200 Kaninchen ist langfristig zu rechnen. (1,5P)

(2) Aufgrund beschränkter Ressourcen können die Kaninchen sich nicht ewig exponentiell vermehren. (0,5P)

(3) $g'(t) = 0{,}1 \cdot c \cdot e^{-0{,}1t+2} > 0$ für c > 0, da $e^{-0{,}1t+2}$ immer größer 0 ist. (2P)

(4) $g(20) = 1200 - c \cdot \underbrace{e^{-0{,}1\cdot 20+2}}_{=1}$;$f(20) = 443{,}34 \Rightarrow 1200 - c = 443{,}34 \Rightarrow \boxed{c = 756{,}55}$ (2P) **6P**

Aufgabe 2

a) Setze A in Funktionsgleichung ein:

$3 = e^{c\cdot 2+1} \Leftrightarrow \ln 3 = 2c + 1 \Leftrightarrow 2c = \ln 3 - 1 \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{\ln 3 - 1}{2} \approx 0{,}049}$ (1,5P)

b) $f_c{}'(x) = c \cdot e^{cx+1}$ und $f_c{}'(0) = 2 \Leftrightarrow c \cdot e^{0+1} = 2 \Leftrightarrow \boxed{c = \frac{2}{e}}$ (1,5P) **3P**

Summe: 15 Punkte